Série 12

Exercice S12E1** (50 min) : Vol vers la Station Spatiale Internationale (Examen 2018)

La station spatiale internationale est un satellite tournant autour de la Terre. Les spationautes sont ravitaillés périodiquement par une navette lancée par une fusée. On appellera G la constante de gravitation universelle et M la masse de la Terre. Après la libération par la fusée, la navette de masse m est placée sur une orbite circulaire C_1 de rayon R_1, qui est plus petite que l'orbite circulaire C_2 de rayon R_2 de la station spatiale.

a) Démontrez que la vitesse d'un satellite sur une orbite circulaire est constante.

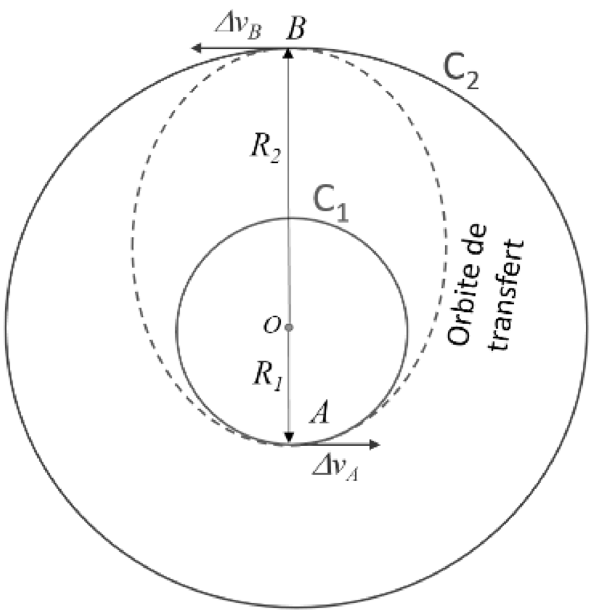
b) Exprimez la vitesse v_1 de la navette sur l'orbite circulaire C_1 en fonction des données du problème.

c) Donnez l'expression de l'énergie mécanique E_1 sur l'orbite C_1 en fonction de G, m, M, et R_1.

La navette rejoint ensuite l'orbite C_2 grâce à l'allumage d'un moteur.

d) Calculer le travail W_{12} de la force de gravitation $\vec{F}$ qui s'exerce sur la navette quand celle-ci passe de l'orbite C_1 à l'orbite C_2.

En pratique, pour atteindre l'orbite circulaire C_2, il faut d'abord passer par une orbite de transfert qui est elliptique, comme indiqué en pointillé sur le schéma ci-dessous.



e) La navette est sur l'orbite de transfert. Exprimez la vitesse v_B de la navette au point B en fonction de sa vitesse v_A au point A.

f) Déterminez l'expression de l'énergie mécanique E_T sur l'orbite de transfert en fonction de G, m, M, R_1 et R_2.

g) Exprimez la vitesse $v_A = v_1 + \Delta v_A$ qu'il faut communiquer à la navette pour passer de l'orbite circulaire C_1 à l'orbite de transfert. Le résultat sera exprimé en fonction de E_T, E_1, et m.

h) En B, il faut ajuster la vitesse pour passer de l'orbite de transfert à l'orbite circulaire. Cette variation de vitesse Δv_B de la navette en B est-elle positive ou négative ? Justifiez votre réponse sans calcul.

Exercice S12E2** (50 min) : SpaceX (Extrait examen 2023)

Une fusée SpaceX embarque un satellite qui doit être placé sur une orbite géostationnaire.

Le tir a lieu sur la base de lancement de Cap Canaveral dans l'hémisphère nord (latitude $\lambda : 28°28'$N). On note M_T la masse de la Terre, m_f la masse totale de la fusée (avec le satellite), m la masse du satellite, R_T le rayon de la Terre, h l'altitude du satellite, et G la constante de gravitation. $\overrightarrow{\Omega_T}$ est la vitesse angulaire de la Terre.

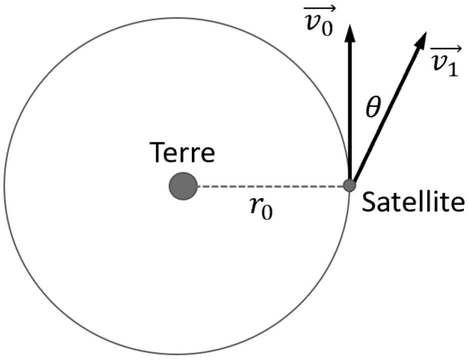
Lorsque la fusée atteint l'altitude h, le satellite est mis sur une orbite circulaire de rayon r_0 avec une vitesse v_0 (vitesse dans le référentiel de la Terre que l'on suppose galiléen pour la suite du problème).

a) Démontrez que la période keplérienne (période de révolution) du satellite est $T = 2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{GM_T}}$.

b) Montrez que la période de révolution T d'un satellite à l'altitude h peut s'écrire $T(h) = T_0\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^{3/2}$ avec $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R_T^3}{GM_T}}$. Déterminez l'altitude h_{geo} pour un satellite géostationnaire en fonction de T_0, R_T, et T_T la période de révolution de la Terre sur elle-même.

c) Dessinez dans un diagramme la courbe d'énergie potentielle effective $E_{p,eff}(r)$. Indiquez sur le diagramme l'énergie mécanique E_0 du satellite correspondant à la trajectoire circulaire de rayon r_0. Repérez le rayon r_0 dans ce diagramme.

En raison d'une erreur de positionnement de la fusée, le satellite est lancé avec une vitesse $\overrightarrow{v_1}$ faisant un angle θ par rapport à la vitesse $\overrightarrow{v_0}$ (voir schéma ci-après). Les normes des vitesses sont identiques.



d) Exprimez la norme du moment cinétique L_1 correspondant au lancer à la vitesse $\vec{v_1}$ en fonction de L_0, le moment cinétique pour l'orbite circulaire de rayon r_0.

e) Exprimez l'énergie mécanique du satellite sur l'orbite circulaire en fonction de M_T, m, r_0 et G.

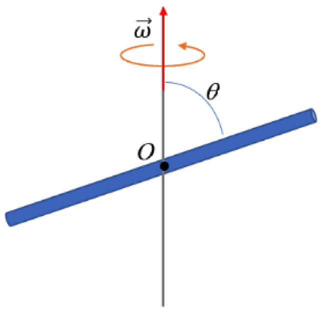
f) Que pouvez-vous dire à propos de l'énergie mécanique du satellite sur la nouvelle orbite (est-elle plus grande, plus petite, identique) ? Dessinez dans un même diagramme les courbes d'énergie potentielle effective $E_{p,eff}(r)$ pour les deux orbites et indiquez dans ce diagramme l'énergie mécanique du satellite sur la nouvelle orbite.

g) Reportez dans une même figure l'orbite circulaire de rayon r_0 ainsi que la nouvelle orbite correspondant au lancer à la vitesse $\vec{v_1}$. Vous indiquerez aussi sur la figure les vecteurs vitesses $\vec{v_0}$ et $\vec{v_1}$.

h) Déterminez les valeurs extrémales r_1 et r_2 du rayon-vecteur (périgée et apogée) de la nouvelle orbite correspondant au lancer à la vitesse $\vec{v_1}$ en fonction de r_0 et θ.

Exercice S12E3** (30 min) : Moment cinétique d'une barre

Une barre homogène de masse m, de longueur l, et de section négligeable, tourne à la vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical fixe passant par son centre de masse. La barre et l'axe forment à tout instant un angle constant θ dans le plan vertical.



1. Calculez, en fonction de θ_0 et de ω, le moment cinétique $\vec{L}_0$ de la barre dans le repère lié à la barre.
2. Soient $\vec{L}$ le moment cinétique de la barre dans le repère fixe et $\vec{\omega}$ la vitesse angulaire de rotation. Ces deux vecteurs sont-ils colinéaires pour un angle θ_0 quelconque ? Pour quelle(s) valeur(s) le sont-ils ?

* * * * * * *

Exercices supplémentaires

Exercice S12ES1** (50 min) : La sonde lunaire (Examen 2019)

Une sonde de masse m se dirige vers la Lune (rayon R_L, masse M_L). Dans un premier temps le vecteur vitesse pointe vers le centre de la Lune et la sonde s'écrase sur celle-ci. Au point A, la sonde a la vitesse v_A. Le point A est à la distance d_A du centre de la Lune.

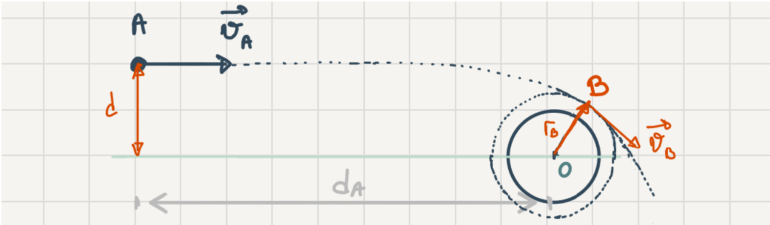
a) Calculer la variation d'énergie cinétique de la sonde au cours de l'impact, dans le référentiel de la Lune.

Pour éviter ce scénario-catastrophe, la sonde s'approche de la Lune avec la condition représentée sur le dessin ci-dessous. Au point A, $v_A = 1000\ \mathrm{ms}^{-1}$. La distance OA vaut $500'000$ km. La masse de la Lune vaut $7 \cdot 10^{22}$ kg et la constante de gravitation $G = 7 \cdot 10^{-11}$SI.

b) Montrer qu'au point A, l'énergie potentielle de la sonde est, en norme, négligeable devant son énergie cinétique.

c) La sonde est-elle en orbite autour de la Lune? Justifier.

On suppose que la sonde suit la trajectoire représentée en pointillés. Au point B , sa vitesse est v_B, et le vecteur vitesse $\vec{v}_B$ est tangent à l'orbite circulaire de rayon r_B.



d) Calculer d en fonction de v_A, v_B et r_B.

e) Calculer d en fonction de r_B, G, M_L et v_A.

f) En déduire la valeur minimale de d telle que la sonde ne s'écrase pas sur la Lune.

g) Calculer la vitesse que devrait avoir la sonde en B pour avoir une orbite circulaire de rayon r_B.

h) Pour mettre la sonde sur une orbite circulaire en B faut-il diminuer ou augmenter sa vitesse? Justifier.

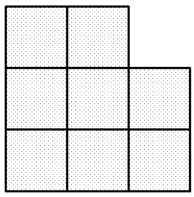
Une fois sur l'orbite circulaire, la sonde est percutée par-derrière par un petit astéroïde de masse $m/2$ et de vitesse $2v_B$. Le choc est parfaitement inélastique.

i) Calculer la vitesse de la sonde juste après le choc en fonction de v_B

j) Quelle est la nouvelle trajectoire ? Justifier. Faire un schéma.

Exercice S12ES2* (5 min) : Centre de masse

Déterminez la position du centre de masse de la figure suivante. Chaque carré plein de côté α est homogène et a une masse de 1 kg. On pose l'origine du repère au coin inférieur gauche.



Exercice S12ES3* (10 min) : Moment d'inertie d'un cylindre creux

On cherche à calculer le moment d'inertie autour de l'axe z d'un cylindre creux de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2 , de hauteur h, et de masse M. L'axe z passe par le centre de masse du cylindre. Exprimez le moment d'inertie en fonction de M, R_1 et R_2. La masse volumique du cylindre est constante.